Informationstheorie, FS 2017 Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik Nico Gorbach

Lösungen zu Übungsblatt 2

2.1

$A_1 = (A \cup B \cup C)^c$
$A_2 = A \cup B \cup C$
$A_3 = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
$A_4 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$A_5 = (A \cap B \cap C)^c$
$A_6 = A_5$

2.2

- $E[Y_1] = E[X] = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P_X(x) = \frac{17}{8}$
- $E[Y_2] = E[X^2] = \sum_{x=1}^{6} x^2 \cdot P_X(x) = \frac{55}{8}$
- $E[Y_3] = E[P_X(X)] = \sum_{x=1}^{6} P_X(x) \cdot P_X(x) = \frac{21}{64}$

2.3

Die Aussage berücksichtigt nicht, dass die einzelnen Würfelergebnisse nicht gleich wahrscheinlich sind. Würde die Reihenfolge eine Rolle spielen, so wären bei dreifachem Würfeln 6^3 verschiedene Kombinationen möglich, so dass jeder die Wahrscheinlichkeit 6^{-3} zukäme. Da die Reihenfolge jedoch unerheblich ist, besitzen die Ergebnisse mit drei verschiedenen Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit $6 \cdot 6^{-3}$, da sie in sechs verschiedenen Reihenfolgen vorkommen können, diejenigen mit genau zwei identischen Augenzahlen eine Wahrscheinlichkeit von $3 \cdot 6^{-3}$ und die Dreierpaschs die Wahrscheinlichkeit 6^{-3}. Insgesamt erhält man somit für das Ereignis "Augensumme 11" die Wahrscheinlichkeit $27 \cdot 6^{-3}$, für das Ereignis "Augensumme 12" dagegen die Wahrscheinlichkeit $25 \cdot 6^{-3}$.

2.4

Als Wahrscheinlichkeitsraum kann man die Menge Σ_{32} der Permutationen (d.h. der bijektiven Selbstabbildungen) von $\{1, 2, \dots, 32\}$ mit der Gleichverteilung wählen; es gilt dann $p(\sigma) = \frac{1}{32!}$ für jedes $\sigma \in \Sigma_{32}$, da $|\Sigma_{32}| = 32!$. Jede Permutation entspricht dabei einer möglichen Reihenfolge der 32 Karten. Das Ereignis "Alle 4 Asse folgen direkt aufeinander" tritt ein mit

Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4! \cdot 28! \cdot 29}{32!} = 29 \cdot \binom{32}{4}^{-1},$$

denn es gibt $4! \cdot 28!$ Permutationen, die vier gegebene Zahlen (entsprechend den vier Assen) auf einen gegebenen Block von vier aufeinanderfolgenden Zahlen abbilden, und 29 solcher Blöcke.

2.5

a) Wir definieren die Zufallsvariablen K und T: $K = 1$ falls Alice krank ist, sonst $K = 0$. $T = 1$ falls das Testergebnis von Alice positiv ist, sonst $T = 0$. Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(K=0|T=1) &= \frac{P(K=0,T=1)}{P(T=1)} = \frac{P(K=0)\cdot P(T=1|K=0)}{0.99999\cdot 0.01 + 0.00001\cdot 0.99} \\ &= \frac{0.99999\cdot 0.01}{0.0100098} = \frac{99999}{100098} \approx 0.99901097. \end{aligned}$$

Die A-priori-Wahrscheinlichkeit liegt bei 0.99999. Ein positives Testergebnis braucht Alice also nicht stark zu beunruhigen.

b) K und T seien wie oben für Bob definiert. Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(K=1|T=0) &= \frac{P(K=1,T=0)}{P(T=0)} = \frac{P(K=1)\cdot P(T=0|K=1)}{0.99999\cdot 0.99 + 0.00001\cdot 0.01} \\ &= \frac{0.00001\cdot 0.01}{0.9899902} = \frac{1}{9899902} \approx 0.0000001010111. \end{aligned}$$

Die A-priori-Wahrscheinlichkeit liegt bei 0.00001. Ein negatives Testergebnis erhöht Bobs Gelassenheit um etwas weniger als den Faktor 100.

2.6

a) Ja, weil die Werte der Tabelle sich auf 1 summieren.

b) Die Verteilungen von P_S und P_K sind durch die folgende Tabelle gegeben:

P_S	h	w	k	e
	0.22	0.3	0.3	0.18

P_K	h	w	k	e
	0.32	0.2	0.2	0.28

c) Die Ereignisse $K = k$ und $S = w$ sind unabhängig, weil

$$P[K=k, S=w] = P[K=k]\cdot P[S=w].$$

$$\begin{aligned} P[K=k,S=w] &= 0.06 \\ P[K=k]\cdot P[S=w] &= 0.2\cdot 0.3 = 0.06 \end{aligned}$$

d) Die Zufallsvariablen K und S sind nicht unabhängig, weil

$$P[K=e, S=h] \neq P[K=e]\cdot P[S=h].$$

$$\begin{aligned} P[K=e,S=h] &= 0 \\ P[K=e]\cdot P[S=h] &= 0.28\cdot 0.22 = 0.0616 \end{aligned}$$

e) Es gilt

$$P[K = w \mid S = h] \;=\; \frac{P[K = w, S = h]}{P[S = h]} \;=\; \frac{0.04}{0.22} \;\approx\; 0.1818$$

f) Sie sollten in der Schweiz bleiben, weil $P[S = w \mid K \neq e] > P[K = w \mid K \neq e]$

$$\begin{aligned} P[K = w \mid K \neq e] &= \frac{P[K = w, K \neq e]}{P[K \neq e]} \\ &= \frac{P[K = w]}{P[K \neq e]} \\ &= \frac{0.2}{1 - 0.28} \;\approx\; 0.2778 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P[S = w \mid K \neq e] &= \frac{P[S = w, K \neq e]}{P[K \neq e]} \\ &= \frac{0.12 + 0.09 + 0.06}{1 - 0.28} \;=\; 0.375 \end{aligned}$$

2.7

Wenn der Sender $s \in \{0, 1\}$ sendet, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Empfänger ein bestimmtes $\mathbf{r}$ empfängt, gegeben durch

$$P(\mathbf{r}|s) = p^{3-k}(1-p)^k,$$

wobei $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Anzahl der Bits r_i mit $r_i = s$ angibt. Wegen $p < \frac{1}{2} < 1 - p$ wird dieser Ausdruck bei gegebenem $\mathbf{r}$ maximiert durch das $s \in \{0, 1\}$ mit dem grösseren k, d.h. das in $\mathbf{r}$ häufiger vorkommende s; nach Definition des Decodierers ist das gleich $\hat{s}(\mathbf{r})$, und damit folgt $\hat{s}(\mathbf{r}) = \mathrm{argmax}_s P(\mathbf{r}|s)$.

2.8

a)

$$\begin{aligned} 0010110 &\mapsto 001011\mathbf{1} \\ 1010110 &\mapsto 1010\mathbf{0}10 \\ 0110001 &\mapsto 0110001 \\ 0011111 &\mapsto 001\mathbf{0}111 \end{aligned}$$

b) Ein Fehler beim Decodieren eines 7er-Blocks tritt genau dann ein, wenn bei der Übertragung mindestens zwei Fehler passiert sind (siehe Teil d)). Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$P(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}) = \sum_{r=2}^{7} \binom{7}{r} p^r (1-p)^{7-r}$$

c) Die Menge der Codewörter $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_7)$ ist charakterisiert durch das Erfüllen der Gleichungen $t_5 = t_1 + t_2 + t_3$, $t_6 = t_2 + t_3 + t_4$ und $t_7 = t_1 + t_3 + t_4$ (alles modulo 2). Da diese Gleichungen linear sind, muss, wenn sowohl $\mathbf{t}$ als auch $\mathbf{t} + \mathbf{n}$ Codewörter sind, auch $\mathbf{n}$ ein Codewort sein. Alle Codewörter erhält man, indem man alle möglichen Worte in $\{0,1\}^4$ mit dem (7,4)-Hamming-Encoder codiert. Es gibt also genau 16. Wenn eines davon als Rauschen auftritt, das ungleich $(0, \dots, 0)$ ist, wird falsch decodiert.

d) Wie in der Vorlesung besprochen, wird beim Decodieren von $\mathbf{r} \in \{0,1\}^7$ genau ein Bit geflippt, um ausgehend von $\mathbf{r}$ ein Codewort zu erhalten (es sei denn, $\mathbf{r}$ ist bereits ein Codewort). Klar ist daher, dass bei mindestens zwei Fehlern im Block der ersten vier Bits $(r_1, ..., r_4)$ ein Decodierfehler auftritt; das erledigt die meisten Fälle, insbesondere die von insgesamt 5, 6 und 7 Fehlern. Die übrigen Fälle sind 1+1, 0+2, 1+2, 0+3 und 1+3 Fehler (das ist jeweils die Anzahl der Fehler bei den ersten vier Bits + die Anzahl der Fehler bei den parity check bits). Bei 0+2 und 0+3 Fehlern ist klar, dass beim Decodieren eines der ersten vier Bits geflippt werden muss, weil die drei letzen jeweils nur in einer der Gleichungen (s.o.) vorkommen; deswegen tritt ein Decodierfehler auf. Die übrigen Fälle 1+1, 1+2 und 1+3 muss man noch getrennt betrachten, um zu sehen, dass jeweils ein anderes Bit als das falsch übertragene im 4er-Block geflippt werden muss, um ein Codewort zu erhalten, und dass deshalb ebenfalls ein Decodierfehler auftritt.