Informationstheorie, FS 2017 Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik Nico Gorbach

Lösungen zu Übungsblatt 2

2.1

Wir schreiben $H(p_1, \dots, p_n)$ für die Entropie einer Verteilung, deren Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$ haben (vgl. Aufgabe 2.1). Die Entropie von X ist

$$\begin{aligned} H(X) &= H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{12} + \varepsilon, \tfrac{5}{12} - \varepsilon) \\ &= -\tfrac{1}{2}\log(\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{12} + \varepsilon)\log(\tfrac{1}{12} + \varepsilon) - (\tfrac{5}{12} - \varepsilon)\log(\tfrac{5}{12} - \varepsilon) \\ &= \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{12} + \varepsilon)\log(\tfrac{1}{12} + \varepsilon) - (\tfrac{5}{12} - \varepsilon)\log(\tfrac{5}{12} - \varepsilon) \end{aligned}$$

Zunächst sieht man, dass P_X nur für $-\frac{1}{12} \leq \varepsilon \leq \frac{5}{12}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Für die Intervallgrenzen ist die Entropie

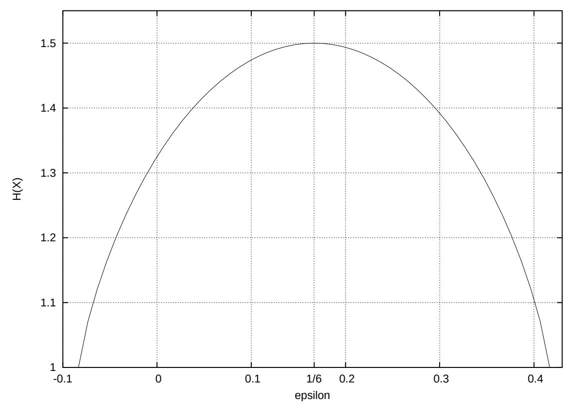
$$\begin{aligned} H(X|_{\varepsilon=-\frac{1}{12}}) &= H(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}) = 1 \\ H(X|_{\varepsilon=\frac{5}{12}}) &= H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0) = 1 \end{aligned}$$

Um das Maximum zu finden, leiten wir diesen Ausdruck ab und finden die Nullstelle:

$$\frac{dH(X)}{d\varepsilon} = -\log(\tfrac{1}{12} + \varepsilon) + \log(\tfrac{5}{12} - \varepsilon)$$

Dieser Ausdruck ist Null für $\varepsilon = \frac{1}{6}$. Das ist intuitiv einleuchtend, da für dieses ε die Verteilung von X am nächsten an der uniformen Verteilung ist. Das Maximum ist

$$H(X|_{\varepsilon=\frac{1}{6}}) = H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) = -\tfrac{1}{2}\log(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4}\log(\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{4}\log(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{3}{2}.$$



2.2

Es gilt

$$
\begin{aligned}
H(p_1, p_2, \dots) &= -\sum_{i \geq 1} p_i \log p_i \\
&= -p_1 \log p_1 - (1-p_1)\log(1-p_1) - \sum_{i \geq 2} p_i(\log p_i - \log(1-p_1)) \\
&= -p_1 \log p_1 - (1-p_1)\log(1-p_1) - (1-p_1)\sum_{i \geq 2} \frac{p_i}{1-p_1} \log \frac{p_i}{1-p_1} \\
&= H(p_1, 1-p_1) + (1-p_1)H(p_2, p_3, \dots)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir im ersten Umformungsschritt den hinzugefügten Term $-(1-p_1)\log(1-p_1)$ in der Summe wieder abgezogen, unter Ausnutzung von $\sum_{i \geq 2} p_i = 1 - p_1$.

Interpretation: Wir können die Unsicherheit bzgl. des Wertes einer Zufallsvariablen mit der Verteilung $(p_1, p_2, \dots)$ aufspalten als Summe der Unsicherheit darüber, ob ein bestimmter Wert x_1 angenommen wird oder nicht, und der verbleibenden Unsicherheit über alle restlichen Werte, wenn wir wissen, dass x_1 nicht angenommen wurde.

Die Zerlegungseigenschaft ergibt sich übrigens auch unmittelbar aus der Kettenregel $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$, wenn man für X die Indikatorvariable $I_{\{x_1\}}$ wählt.

2.3

Das Eintreten des Ereignisses $\{X = n\}$ bedeutet, dass bei den ersten $n-1$ Würfen "Zahl" fällt, und beim n-ten Wurf "Kopf". Da bei jedem Wurf "Kopf" und "Zahl" jeweils Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, gilt folglich

$$P(X = n) = (\tfrac{1}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2^n}$$

Die Entropie von X ist daher

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{1}{2^n} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot n$$

- **a)** Mit Hilfe der angegeben Identität ergibt sich direkt $H(X) = 2$.
- **b)** Wir können $H(X)$ auch schreiben als $H(X) = H(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$. Mit Hilfe der Zerlegungseigenschaft erhalten wir

  $$H(X) = H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \dots) = H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \dots) = H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}H(X).$$

  Aufösen nach $H(X)$ liefert $H(X) = 2H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \cdot 1 = 2$.

2.4

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen S und T können aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y ($P_X(i) = P_Y(i) = 1/6$ für alle $i \in \{1, \dots, 6\}$) abgeleitet werden:

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_S(s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P_T(t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Es gilt $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$ (da X und Y unabhängig sind) und $H(X) = H(Y) = H(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \approx 2.58$. Aus $S = X + Y$ und $Y = S - X$ folgt $H(X,Y) = H(X,S)$, denn aus X und Y lassen sich X und S berechnen und umgekehrt. Analog gilt auch $H(X,T) = H(X,Y)$. Mit diesen Überlegungen lassen sich die gefragten Grössen einfach berechnen.

a) $H(S) = H(\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}) \approx 3.27$.

b) $H(T) = H(\frac{1}{36}, \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{3}{36}, \frac{3}{36}, \frac{3}{36}, \frac{3}{36}, \frac{3}{36}, \frac{3}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}, \frac{1}{36}) \approx 3.89$.

c) $H(X|S) = H(X,S) - H(S) = H(X,Y) - H(S) = 2H(X) - H(S) \approx 1.90$.

d) $I(X;S) = H(X) - H(X|S) \approx 0.69$.

e) $I(Y;S) = I(X;S) \approx 0.69$.

f) $I(X;T) = H(X) - H(X|T) = H(X) - H(X,T) + H(T) = H(X) - H(X,Y) + H(T) = H(X) - 2H(X) + H(T) = H(T) - H(X) \approx 1.31$.

g) $H(S|X) = H(S,X) - H(X) = H(X,Y) - H(X) = H(X) \approx 2.58$.

2.5

Für jedes x mit $P_X(x) > 0$ ist $P_{Y|X=x}(y) = 1$ falls $y = f(x)$ und $P_{Y|X=x}(y) = 0$ falls $y \neq f(x)$. Die auf $\{X = x\}$ bedingte Entropie von Y ist daher $H(Y|X = x) = H(1,0) = 0$. Wegen $H(Y|X) = E_{P_X}(H(Y|X = x))$ ist damit auch $H(Y|X) = 0$. Das ist auch intuitiv klar: Da Y eine Funktion von X ist, besteht keine Unsicherheit mehr bzgl. des Werts von Y sobald der von X bekannt ist.

Nehmen wir nun an, dass $H(Y|X) = 0$ gilt. Dann ist für jedes x mit $P(x) > 0$ die bedingte Entropie $H(Y|X = x) = 0$, und daher gibt es ein eindeutig bestimmtes $y =: f(x)$, so dass $P_{Y|X=x}(y) = 1$ gilt (siehe Vorlesung). Mit der so definierten Funktion f betrachten wir die Menge $f(X(\Omega)) = \{y \mid \exists x : y = f(x)\}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
P_Y(f(X(\Omega))) &= \sum_{y \in f(X(\Omega))} P_Y(y) \\
&= \sum_{x, P_X(x)>0} P_X(x) \sum_{y \in f(X(\Omega))} P_{Y|X=x}(y) \\
&= \sum_{x, P_X(x)>0} P_X(x) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Folglich gibt es für jedes y mit $P_Y(y) > 0$ ein x, so dass $y = f(x)$.

Eine nötige und hinreichende Bedingung für $H(Y|X) = 0$ ist deswegen die Existenz einer Funktion $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, so dass für jedes $y \in \mathcal{Y}$ mit $P_Y(y) > 0$ ein $x \in \mathcal{X}$ existiert, so dass $y = f(x)$ ist. (Genau genommen ist diese Bedingung schwächer als die im ersten Teil geforderte Bedingung $Y = f(X)$; es ist aber leicht zu sehen, dass sie ebenfalls $H(Y|X) = 0$ impliziert.)

2.6

$I(X;Y)=0$ impliziert wegen $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)$, dass

$$H(X|Y)=H(X) \quad \text{und} \quad H(Y|X)=H(Y),$$

d.h. die Kenntnis des Wertes einer der Zufallsvariablen reduziert nicht die Unsicherheit des Wertes der anderen. Mit der Kettenregel $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$ folgt weiter

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y),$$

d.h. die Unsicherheit über den Wert von (X,Y) ist die Summe der Unsicherheiten bzgl. der Werte von X und Y.

2.7

Die gegenseitige Information zweier Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= -\sum_{x,y} P_{XY}(x,y)\log\frac{P_X(x)P_Y(y)}{P_{XY}(x,y)} \\ &= D_{KL}(P_{XY}\|P_XP_Y), \end{aligned}$$

d.h. sie ist gleich der Kullback-Leibler-Divergenz zwischen der gemeinsamen Verteilung P_{XY} und P_XP_Y, dem Produkt der Marginalverteilungen von X und Y.

2.8

Die folgende Rechnung verallgemeinert den Beweis von $I(X;Y)\geq 0$ aus der Vorlesung. Es gilt

$$\begin{aligned} D_{KL}(P\|Q) &= -\sum_x P(x)\log\frac{Q(x)}{P(x)} \\ &= E_P\Big(-\log\frac{Q}{P}\Big) \\ &\geq -\log\Big(E_P\frac{Q}{P}\Big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Jensen-Ungleichung und die Konvexität der Funktion $z\mapsto -\log z$ verwendet haben. Da diese Funktion sogar *strikt* konvex ist, kann Gleichheit nur eintreten, wenn $-\log\frac{P}{Q}$ gleich einer Konstanten ist; da P und Q Verteilungen sind, muss diese Konstante gleich 1 sein, d.h. $P=Q$.

2.9

Wir können z.B. die Verteilungen $P(0)=\frac{1}{4}$, $P(1)=\frac{3}{4}$ und $Q(0)=Q(1)=\frac{1}{2}$ wählen. Für diese gilt

$$D_{KL}(P\|Q)=\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\log\frac{3}{2}=\frac{1}{4}\log\Big(\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{3}{2}\Big)^3\Big)=\frac{1}{4}\log\frac{27}{16}$$

und

$$D_{KL}(Q\|P)=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\log 2^2+\frac{1}{4}\log\Big(\frac{2}{3}\Big)^2=\frac{1}{4}\log\frac{16}{9}.$$