Dr. Luis Haug
Nico Gorbach

Lösungen zu Übungsblatt 6

6.1

a) Gemäss Kettenregel gelten $H(X,Y,Z)-H(X,Y) = H(Z|X,Y)$ und $H(X,Z)-H(X) = H(Z|X)$. Die zu zeigende Ungleichung ist deswegen äquivalent zu $H(Z|X,Y) \leq H(Z|X)$ bzw. wegen $H(Z|X) - H(Z|X,Y) = I(Z;Y|X)$ zu

$$I(Z;Y|X) \geq 0.$$

Dass diese Ungleichung stets erfüllt ist wurde in Aufgabe 3.4 gezeigt. Gleichheit gilt genau dann, wenn $Y \to X \to Z$ eine Markov-Kette bilden (siehe Aufgabe 3.5).

b) Die zu zeigende Ungleichung ist äquivalent zu

$$I(X;Z|Y) + I(Z;Y) \geq I(Z;Y|X) + I(X;Z). \tag{1}$$

Durch Verwendung der Kettenregel und unter Ausnutzung der Symmetrie der (bedingten) wechselseitigen Information sieht man, dass beide Seiten in (1) gleich $I(Z;X,Y)$ sind. Die zu zeigende Ungleichung ist also ohne weitere Bedingung stets eine Gleichung.

6.2

Sei X_i der Ausgang der i-ten Runde. Das Kapital C_n nach der n-ten Runde lässt sich aus dem der $(n-1)$-ten Runde gemäss

$$C_n = C_{n-1}\frac{S(X_n)}{Q(X_n)}$$

berechnen. Rekursiv erhalten wir daraus

$$C_n = C_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{S(X_i)}{Q(X_i)}.$$

a) Die "Gewinnrate" auf lange Sicht, $R_\infty = \lim_{n\to\infty} R_n$, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
R_\infty &= \lim_{n\to\infty} \log \frac{C_n}{C_0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \prod_{i-1}^{n} \frac{S(X_i)}{Q(X_i)} \\
&= E_P \log \frac{S(X)}{Q(X)} \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(k) \log \frac{S(k)}{Q(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(k) \Big(\log \frac{P(k)}{Q(k)} + \log \frac{S(k)}{P(k)} \Big) \\
&= D_{KL}(P\|Q) - D_{KL}(P\|S).
\end{aligned}$$

Das dritte Gleichheitszeichen folgt aus dem Gesetz der grossen Zahlen.

b) An der Gleichung oben sieht man, dass R_∞ genau dann maximal ist, wenn $D_{KL}(P\|S)$ minimal ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $S = P$ gilt, d.h. wenn der Spieler seine Einsätze gemäss der wahren Verteilung der Ausgänge platziert. In dem Fall gilt $R_\infty = D_{KL}(P\|Q)$.

6.3

a) Wir setzen $p := P(a_1)$. Dann gilt $P(a_2) = P(a_3) = P(a_4) = \frac{1-p}{3}$. Bei der Konstruktion des entsprechenden Huffman-Codes werden im ersten Iterationsschritt z.B. a_3 und a_4 kombiniert; die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten ist $\frac{2(1-p)}{3}$. Im nächsten Schritt kann daher a_1 genau dann mit a_2 kombiniert werden, wenn $p \leq \frac{2(1-p)}{3}$ gilt, was äquivalent ist zu $p \leq \frac{2}{5}$; wenn dagegen $p > \frac{2(1-p)}{3}$ ist, d.h. $p > \frac{2}{5}$, ist $\ell_1 = 1$ garantiert. Die gesuchte Zahl ist daher $q = \frac{2}{5}$. Im Fall $p = \frac{2}{5}$ gibt es z.B. einen Huffman-Code für X mit Codewörtern $\{00, 01, 10, 11\}$; insbesondere gilt $\ell_1 = 2$.

b) Damit $\ell_1 > 1$ eintreten kann, muss $P(a_3) + P(a_4) \geq P(a_1)$ gelten, damit im zweiten Iterationsschritt der Huffman-Codierung a_1 mit a_2 kombiniert werden kann. Da auch $P(a_2) \geq \frac{1-P(a_1)}{3}$ gilt, folgt

$$1 = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) \geq 2P(a_1) + \frac{1-P(a_1)}{3} = \frac{1+5P(a_1)}{3},$$

und damit $P(a_1) \leq \frac{2}{5} = q$. Falls $P(a_1) > q$ gilt, ist $\ell_1 = 1$ also auch unter der angenommenen Bedingung garantiert.

c) Nach dem ersten Iterationsschritt gibt es drei Knoten, und a_1 wird mit einem der anderen kombiniert, falls $P(a_1) < \frac{1}{3}$ ist (denn einer der anderen muss dann Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{3}$ haben). Falls dagegen $P(a_1) \geq \frac{1}{3}$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit der beiden im Allgemeinen jeweils $< \frac{1}{3}$, so dass diese kombiniert werden und $\ell_1 = 1$ gilt. Damit ist $q' = \frac{1}{3}$ der grösste Wert, so dass $P(a_1) < q'$ impliziert, dass $\ell_1 > 1$ ist.

6.4

Es gilt $112 = 2^4 \cdot 7$, und daher ensteht ein Huffman-Codebaum für $\mathbf{p} = (\frac{1}{112}, \ldots, \frac{1}{112})$ dadurch, dass wir an die Blätter eines Huffman-Codebaums für $(\frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{7})$ jeweils einen für $(\frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^4})$ anhängen (natürlich entsteht er bei der Verwendung des Huffman-Algorithmus nicht so, sondern wird von den Blättern her aufgebaut). Die Wortlängen für $(\frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{7})$ sind $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$, und die für $(\frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^4})$ sind $(4, \ldots, 4)$. Ein Huffman-Code für $\mathbf{p} = (\frac{1}{112}, \ldots, \frac{1}{112})$ hat daher 16 Wörter der Länge 6 und 96 Wörter der Länge 7.