Informationstheorie, FS 2017 Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik Nico Gorbach

Lösungen zu Übungsblatt 7

7.1

a) Aufteilung in Phrasen: $c|a|b|cc|ca|ac|ab|ac$. Der Code ist damit

$$,10|0,00|00,01|01,10|001,00|010,10|010,01|110$$

(ohne die , und |). Die letzte Phrase ist schon im Wörterbuch, daher entfällt hier die Angabe eines Codes für das letzte Symbol.

b) Die Aufteilung des zu decodierenden Strings in Phrasen entsprechenden Abschnitte ist

$$,00|1,00|10,10|10,01|100,10|010,00.$$

Die Decodierung ist $a|aa|aac|aab|aabc|aaa$ (ohne die |).

7.2

Für jede Verteilung P_X über die Eingabe gilt

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(X) - \sum_y P_Y(y) H(X|Y=y) \\ &\le \log 27 - \log 3 \\ &= \log 9, \end{aligned}$$

denn $H(X) \le \log 27$ und $P_Y(y)H(X|Y=y) = \frac{1}{27}\log 3$ für alle y. Mit der Gleichverteilung $P_X(x) = \frac{1}{27}$ wird diese Schranke erreicht, und damit ist die Kapazität des Kanals gleich $\log 9$. Eine weitere Verteilung P_X, die die Kapazität erreicht, erhält man, indem man 9 Symbole wählt, für die sich die Mengen der möglichen Ausgabesymbole nicht überlappen (z.B. $A, D, G, \ldots$), und $P_X(x) = \frac{1}{9}$ für all diese Symbole und $P_X(x) = 0$ für alle übrigen setzt. Dann gilt $H(X) = \log 9$ und $H(X|Y=y) = 0$ für alle y, und folglich $I(X;Y) = \log 9$.

7.3

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Quellbit nach dem n-ten Übertragung erstmals nicht ausgelöscht wird, beträgt $p^{n-1}(1-p)$. Damit ist die erwartete Anzahl der Wiederholungen, die nötig sind, bis ein Quellbit eindeutig decodiert werden kann, gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1}(1-p) = \frac{1}{1-p},$$

wobei wir die Identität $\sum_{n=1}^{\infty} np^n = \frac{p}{(1-p)^2}$ verwendet haben (vgl. Aufgabe 2.3). Im Schnitt muss jedes Quellbit also $\frac{1}{1-p}$ mal gesendet werden.