Lösungen zu Übungsblatt 11

11.1

Wenn $c \in \mathcal{C}$ ein Codewort ist, dann existiert ein $a \in \mathbb{F}_2^K$ mit $Ga = c$; damit lässt sich leicht nachrechnen, dass $Hc = 0$ ist. Sei nun umgekehrt $c \in F_2^N$ ein Wort mit $Hc = 0$; wenn wir $c = (a^T, b^T)^T$ schreiben mit $a \in \mathbb{F}_2^K$ und $b \in \mathbb{F}_2^{N-K}$ (wobei wir diese Vektoren wie üblich als Spaltenvektoren betrachten), erhalten wir $Hc = -Aa + b = 0$, d.h. $b = Aa$. Daraus ergibt sich $Ga = c$, d.h. c ist eine Codewort.

11.2

a) Wir nehmen an, dass nicht alle Codewörter eine gerade Anzahl an Einsen enthalten, und wählen ein Codewort x mit einer ungeraden Anzahl an Einsen. Für dieses betrachten wir die Abbildung $\varphi_x : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $y \mapsto x + y$. Diese gibt uns eine Bijektion zwischen den Mengen der Codewörter mit gerader bzw. ungerader Anzahl an Einsen. Daher müssen beide Mengen die gleiche Kardinalität haben.

b) Mit einem analogen Argument wie oben sieht man, dass die Menge der Codewörter mit einer Null an der j-ten Stelle entweder alle oder genau die Hälfte der Codewörter enthält. Im ersten Fall kann man den Code verbessern, indem man die j-te Stelle von jedem Codewort entfernt.

c) Das folgt unmittelbar aus der vorigen Teilaufgabe.

d) Wg. der letzten Teilaufgabe ist die *durchnittliche* Anzahl an Einsen pro Codewort in $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ nach oben beschränkt durch

$$\frac{N}{2}\frac{2^K}{2^K - 1}.$$

Die *minimale* Anzahl an Einsen pro Codewort in $\mathcal{C} \setminus \{0\}$, d.h. $d_{\min}(\mathcal{C})$, ist wiederum durch diesen Durchschnitt nach oben beschränkt.