Dr. Luis Haug
Nico Gorbach

Übungsblatt 1

1.1

Es seien A, B und C drei Ereignisse aus einer Menge Ω von Elementarereignissen. Drücken Sie mit Hilfe von Mengenoperationen (d.h. Vereinigung, Schnitt, Komplementbildung) die folgenden Ereignisse aus:

a) A 1 : Keines der drei Ereignisse A, B und C tritt ein.

b) A 2 : Mindestens eines tritt ein.

c) A 3 : Genau eines tritt ein.

d) A 4 : Mindestens zwei treten ein.

e) A 5 : Mindestens eines tritt nicht ein.

f) A 6 : Höchstens zwei treten ein.

1.2

Wir modellieren einen unfairen Würfel durch folgende Verteilung auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

X	1	2	3	4	5	6
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X, X^2 und $P_X(X)$.

1.3

Nehmen Sie Stellung zum Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage: Beim dreimaligen Würfeln mit einem fairen Würfel sind die Ereignisse die Augensumme ist 11 und die Augensumme ist 12 gleich wahrscheinlich, denn beide Ereignisse können auf genau sechs verschiedene Arten dargestellt werden:

$$11 = 6 + 4 + 1 = 6 + 3 + 2 = 5 + 5 + 1 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 = 4 + 4 + 3,$$
$$12 = 6 + 5 + 1 = 6 + 4 + 2 = 6 + 3 + 3 = 5 + 5 + 2 = 5 + 4 + 3 = 4 + 4 + 4.$$

1.4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem gut gemischten Stapel von 32 Skatkarten die 4 Asse direkt aufeinander liegen. Geben Sie explizit den genutzen Wahrscheinlichkeitsraum an.

1.5

Wir betrachten ein Testverfahren für eine Krankheit, an der eine Person mit Wahrscheinlichkeit $p_K = 0.00001$ erkrankt, d.h. es tritt durchschnittlich ein Erkrankter auf 100.000 Einwohner auf. Das Verfahren hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $p_F = 0.01$, d.h. das Testergebnis ist mit Wahrscheinlichkeit 0.99 korrekt (sowohl im positiven wie im negativen Fall).

- Alice lässt sich testen und der Test fällt positiv aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet Alice trotz des Testergebnisses nicht an der Krankheit?
- Bobs Test fällt negativ aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet Bob dennoch an der Krankheit?

Vergleichen Sie mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten vor dem Test.

1.6

Die folgende Tabelle zeigt die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen K = "Wetter in Kanada" und S = "Wetter in der Schweiz". Beide Zufallsvariablen nehmen Werte in der Menge $\{h, w, k, e\}$ an ("heiss", "warm", "kühl","eiskalt").
Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung an:

		S			
	P_{KS}	h	w	k	e
	h	0.17	0.12	0.03	0
K	w	0.04	0.09	0.06	0.01
	k	0.01	0.06	0.10	0.03
	e	0	0.03	0.11	0.14

a) Ist P_{KS} eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

b) Berechnen Sie die Verteilungen P_S und P_K.

c) Sind die Ereignisse $\{K = k\}$ und $\{S = w\}$ unabhängig?

d) Sind die Zufallsvariablen K und S unabhängig?

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in Kanada warm ist, gegeben dass es in der Schweiz heiss ist?

f) Angenommen Sie mögen warmes Wetter und wissen, dass es nicht eiskalt sein wird in Kanada. Wo sollten Sie ihre Ferien verbringen (Kanada oder Schweiz)?

1.7

Angenommen, wir wenden den ($r = 3$)-Wiederholcode für die Datenübertragung über den binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit $0 < p < \frac{1}{2}$. Dessen Decoder $\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, $\mathbf{r} \mapsto \hat{s}(\mathbf{r})$, bildet $\mathbf{r}$ auf das häufiste in $\mathbf{r}$ vorkommende Symbol ab (siehe Vorlesung bzw. [MacKay, Kapitel 1]). Zeigen Sie, dass $\hat{s}(\mathbf{r}) = \mathrm{argmax}_s P(\mathbf{r}|s)$ gilt.

1.8

Der (7,4)-Hamming-Code besteht aus einem Encoder $\{0,1\}^4 \to \{0,1\}^7$, $\mathbf{s} \mapsto \mathbf{t}$, und einem Decoder $\{0,1\}^7 \to \{0,1\}^4$, $\mathbf{r} \mapsto \hat{\mathbf{s}}$, wie in der Vorlesung besprochen (siehe auch [MacKay, Kapitel 1]).

a) Dekodieren Sie folgende Wörter mit dem $(7,4)$-Hamming-Decoder:

$$0010110, 1010110, 0110001, 0011111$$

b) Angenommen, wir verwenden den $(7,4)$-Hamming-Code für die Datenübertragung über den binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit p. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Blockfehlers bei der Übertragung von $\mathbf{s} \in \{0,1\}^4$, also die Wahrscheinlichkeit $P(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s})$, als Funktion von p.

c) Geben Sie einige Vektoren $\mathbf{n} \in \{0,1\}^7$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes Codewort $\mathbf{t} \in \{0,1\}^7$ auch $\mathbf{t} + \mathbf{n}$ ein Codewort ist. Wie viele solcher $\mathbf{n}$ gibt es? Was passiert, wenn ein solches $\mathbf{n}$ als Rauschen auftritt?

d) Zeigen Sie, dass die Vertauschung von zwei oder mehr Bits in einem 7er-Block $\mathbf{t}$ (d.h. $\mathbf{t}$ und $\mathbf{r}$ unterscheiden sich in mindestens zwei Bits) in jedem Fall zu einem Decodierfehler führt (d.h. $\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}$).

1.9

Buchstaben können durch Bitfolgen repräsentiert werden. Zum Beispiel ist es möglich, die acht Buchstaben a bis h mit jeweils drei Bits darzustellen. Dies ist aber nicht die einzige Möglichkeit, insbesonders, wenn wir auch verschiedene Längen von Bitfolgen zulassen. Wenn der zum Beispiel der Buchstabe a im Text viel häufiger als h vorkommt, macht die folgende Repräsentation Sinn:

$$\begin{array}{ll} a \leftarrow 1 & b \leftarrow 01 \\ c \leftarrow 001 & d \leftarrow 0001 \\ e \leftarrow 00001 & f \leftarrow 000001 \\ g \leftarrow 0000001 & h \leftarrow 00000001 \end{array}$$

Gegeben seien nun drei Texte (die nur die Buchstaben a bis h enthalten) und die alle gleich lang sind. Die relativen Häufigkeiten der Buchstaben in den drei Texten ist durch folgende Tabellen gegeben:

P_{T_1}	
a	0.125
b	0.125
c	0.125
d	0.125
e	0.125
f	0.125
g	0.125
h	0.125

P_{T_2}	
a	0.65
b	0.05
c	0.05
d	0.05
e	0.05
f	0.05
g	0.05
h	0.05

P_{T_3}	
a	0.5
b	0.25
c	0.15
d	0.05
e	0.03
f	0.01
g	0.01
h	0

Versuchen Sie ein Gefühl dafür zu entwickeln, welcher Text sich am stärksten komprimieren lässt.