Informationstheorie, FS 2017 Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik Nico Gorbach

Übungsblatt 3

3.1

Geben Sie einen binären Code an, der nicht präfixfrei aber dennoch eindeutig decodierbar ist.

3.2

Gegeben seien zwölf Bälle, von denen elf das gleiche Gewicht haben und einer schwerer oder leichter ist. Sie haben die Aufgabe, mit einer Balkenwaage in möglichst wenigen Wägungen den besonderen Ball zu finden und herauszufinden, ob er schwerer oder leichter ist. Beschreiben Sie eine Strategie dafür. Denken Sie darüber nach, wie sich verschiedene Varianten in Bezug auf den jeweiligen Informationsgewinn unterscheiden. Überlegen Sie sich, was die Aufgabe mit Codierung zu tun hat.

3.3

Zeigen Sie die allgemeine Form der Kettenregel für Entropien: Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$H(X_1, \ldots, X_n) = H(X_1) + \sum_{i=2}^{n} H(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}).$$

Was folgt daraus, wenn $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind?

3.4

Gegeben seien Zufallsvariablen X, Y, Z. Die *bedingte gegenseitige Information*, die X bei gegebenem Z über Y gibt, definieren wir als

$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z).$$

Zeigen Sie, dass $I(X; Y|Z)$ symmetrisch in X und Y ist und dass $I(X; Y|Z) \geq 0$ ist.

3.5

Zufallsvariablen X, Y, Z bilden eine *Markov-Kette* $X \to Y \to Z$, falls für alle x, y, z mit $P_Y(y) > 0$ die Gleichung $P(Z = z|X = x, Y = y) = P(Z = z|Y = y)$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass X, Y, Z genau dann eine Markov-Kette $X \to Y \to Z$ bilden, wenn $I(X; Z|Y) = 0$ ist.

b) Zeigen Sie die *data processing inequality*: Falls X, Y, Z eine Markov-Kette $X \to Y \to Z$ bilden, dann folgt

$$I(X; Z) \leq I(X; Y).$$

c) Folgern Sie, dass für beliebige Zufallsvariablen X, Y und jede Funktion f

$$I(X; f(Y)) \leq I(X; Y)$$

gilt. Geben Sie eine intuitive Interpretation.