Informationstheorie, FS 2017 Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik Nico Gorbach

Übungsblatt 4

4.1

Finden Sie für die Zufallsvariable X mit der Verteilung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
P_X	0.49	0.26	0.12	0.04	0.04	0.03	0.02

einen Huffman-Code[1] und berechnen Sie seine erwartete Länge.

4.2

Gegeben seien die Mengen $\{0, 10, 11\}$, $\{00, 01, 10, 110\}$ und $\{01, 10\}$. Geben Sie jeweils eine Zufallsvariable X samt Verteilung an, so dass die Menge die Menge der Codewörter eines Huffman-Codes für X ist, oder begründen Sie, dass es keine solche gibt.

4.3

Entscheiden Sie für die Tupel $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 3, 3)$ und $(1, 3, 3, 3, 4, 5)$ jeweils, ob sie die Wortlängen eines Huffman-Codes sind. Können Sie ein allgemeines Kriterium dafür angegeben, dass ein gegebenes Tupel $(l_1, \dots, l_n)$ die Wortlängen eines Huffman-Codes darstellt?

4.4

Geben Sie ein Beispiel für eine Verteilung $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_5)$ an, für die es mindestens zwei optimale Codes gibt, für die sich die (geordneten) Tupel der Codewortlängen unterscheiden.

4.5

Beweisen Sie folgende Behauptung aus der Vorlesung (siehe Beweis der Optimalität von Huffman-Codes): Gegeben sei ein optimaler präfixfreier Code C^* für eine Zufallsvariable X mit der Verteilung $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, wobei $p_i = P_X(x_i)$ für $x_i \in X(\Omega)$. Dann gibt es $x_{i_0} \neq x_{i_1}$ mit kleinster Wahrscheinlichkeit (d.h. $p_{i_0} + p_{i_1} \leq p_j + p_k$ für alle $j \neq k$), so dass sich $C^*(x_{i_0})$ und $C^*(x_{i_1})$ nur im letzten Bit unterscheiden.

4.6

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Entropie durch Bedingen auf eine Zufallsvariable nicht zunimmt, d.h. $H(X|Y) \leq H(X)$. Andererseits ist es durchaus möglich, dass die Entropie durch Bedingen auf ein Ereignis $\{Y = y\}$ zunimmt, d.h. $H(X|Y = y) > H(X)$. Geben Sie ein Beispiel dafür.

[1] Wie in der Vorlesung betrachten wir hier nur *binäre* Codes.