Übungsblatt 5

5.1

Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \{0,1\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung P, und sei $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$. Für $\delta \in [0,1]$ sei $H_\delta(X^n) = \min\{\log|S_\delta| \big| S_\delta \subset \{0,1\}^n, P(S_\delta) \geq 1-\delta\}$, siehe Vorlesung. Skizzieren Sie $\frac{1}{n}H_\delta(X^n)$ als Funktion von δ für $n = 1, 2, 1000$ wenn P gegeben ist durch (a) $(0.1, 0.9)$ bzw. (b) $(0.5, 0.5)$.

5.2

Im Folgenden betrachten wir jeweils Grenzwerte bzgl. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

a) Seien (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils wie eine gegebene Zufallsvariable (X, Y) verteilt sind, und sei $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ etc. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{P(X^n)P(Y^n)}{P(X^n, Y^n)}.$$

b) Gegeben seien unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit der gleichen Verteilung P. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(P(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

5.3

Gegeben sei eine Folge von unabhängigen binären Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit der gleichen Verteilung $P(0) = 0.4$, $P(1) = 0.6$. Für die Rechnungen in der folgenden Aufgabe sollten Sie evtl. einen Computer verwenden.

a) Bestimmen Sie $H(X)$.

b) Beschreiben Sie für $n = 25$ und $\varepsilon = 0.1$ die typische Menge $T_{n,\varepsilon}$ und berechnen Sie $P(T_{n,\varepsilon})$ und $|T_{n,\varepsilon}|$.

c) Bestimmen Sie für $\delta = 0.1$ und $n = 25$ die Kardinalität der kleinsten Menge $S_{n,\delta} \subset \{0,1\}^n$ mit $P(S_{n,\delta}) \geq 1 - \delta$ (d.h. bestimmten Sie $2^{H_\delta(X^n)}$).

d) Bestimmen Sie $P(T_{n,\varepsilon} \cap S_{n,\delta})$ und $|T_{n,\varepsilon} \cap S_{n,\delta}|$ für die Mengen aus (b) und (c).