Informationstheorie, FS 2017 Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik Nico Gorbach

Übungsblatt 6

Abgabe: 6. April 2017

6.1 [4 + 4 Punkte]

Seien X, Y, Z Zufallsvariablen, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie jeweils eine nötige und hinreichende Bedingung für Gleichheit an.[1]

a) $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \le H(X, Z) - H(X)$,

b) $I(X; Z|Y) \ge I(Z; Y|X) - I(Z; Y) + I(X; Z)$.

6.2 [4 + 4 Punkte]

In einem Casino kann man auf den Wert einer Zufallsvariable $X : \Omega \to \{1, \ldots, K\}$ wetten. Falls in einer Runde der Ausgang $X = k$ ist, wird das auf k gesetzte Geld mit $1/Q(k)$ multipliziert und als Gewinn ausgeschüttet, während das auf andere Ausgänge gewettete Geld verloren ist. (Dabei ist Q eine Verteilung mit $Q(k) > 0$ für alle k, die die vom Casino angenommene Wahrscheinlichkeit der Ausgänge angibt.) Die Ausgänge verschiedener Runden sind unabhängig. Angenommen, ein Spieler kennt die tatsächliche Verteilung P von X. Sei C_n sein Kapital nach der n-ten Runde ist, und sei

$$R_n = \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_0}$$

die durchschnittliche "Gewinnrate" des Spielers für die ersten n Runden. Seine Strategie ist, in jeder Runde das vorhandene Kapital auf die verschiedenen Ausgänge aufzuteilen und einen Bruchteil $S(k) > 0$ auf $X = k$ zu setzen.

a) Verwenden Sie das Gesetz der grossen Zahlen, um $R_\infty = \lim_{n\to\infty} R_n$ in Abhängigkeit von P, Q und S zu berechnen.

b) Finden Sie die Strategie S, die R_∞ maximiert, und geben Sie den Wert von R_∞ in diesem Fall an.

6.3 [4 + 4 + 4 Punkte]

Sei $X : \Omega \to \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung P.

a) Nehmen Sie, dass $P(a_1) > P(a_2) = P(a_3) = P(a_4)$ gilt. Finden Sie die kleinste Zahl $q \in [0, 1]$, so dass $P(a_1) > q$ impliziert, dass für jeden (binären) Huffman-Code für X die Wortlänge ℓ_1 des Codeworts für a_1 gleich 1 ist. Geben Sie für den Fall $P(a_1) = q$ einen Huffman-Code für X mit $\ell_1 > 1$ an.

[1] Siehe Aufgabe 3.4 für die Definition der bedingten wechselseitigen Information.

b) Nehmen Sie nun die allgemeinere Bedingung $P(a_1) > P(a_2) \geq P(a_3) \geq P(a_4)$ an. Impliziert $P(a_1) > q$ immer noch $\ell_1 = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Nehmen Sie wiederum $P(a_1) > P(a_2) \geq P(a_3) \geq P(a_4)$ an. Finden Sie die grösste Zahl $q' \in [0, 1]$, so dass $P(a_1) < q'$ impliziert, dass $\ell_1 > 1$ ist.

6.4 [4 Punkte]

Finden Sie die Wortlängen eines optimalen präfixfreien Codes für eine Zufallsvariable mit der durch $\mathbf{p} = (\frac{1}{112}, \ldots, \frac{1}{112})$ gegebenen Verteilung.