

Übungsblatt 8

8.1

Zeigen Sie, dass die Kapazität des Kanals mit Übergangsmatrix

$$P_{Y|X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

durch eine Verteilung erreicht wird, die einem der Eingabesymbole Wahrscheinlichkeit 0 gibt. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals. Geben Sie einen intuitiven Grund dafür, dass eines der Symbole nicht verwendet wird.

8.2

In einer Fernsehsendung muss der Kandidat Bob in der letzten Runde auf eine Reihe von Fragen antworten, um den Hauptpreis zu gewinnen. Bob's Freundin Alice sitzt im Publikum. Sie weiss die Antworten auf die Fragen und will sie Bob unauffällig mitteilen, indem sie Bob zuzwinkert. Allerdings kann es sein, dass Bob nicht sieht, mit welchem Auge Alice gezwinkert hat (Wahrscheinlichkeit δ). Mit Wahrscheinlichkeit $\varepsilon < 0.5$ irrt sich Bob und er meint, dass Alice mit dem rechten Auge gezwinkert hat, obwohl sie mit dem linken Auge gezwinkert hat, und umgekehrt. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - \delta - \varepsilon$ sieht also Bob korrekt, mit welchem Auge Alice gezwinkert hat.

- Stellen Sie diesen diskreten, gedächtnisfreien Kanal zwischen Alice und Bob in der üblichen graphischen Notation dar.
- Wie gross ist die Kapazität C des Kanals zwischen Alice und Bob?
- Wir nehmen jetzt an, dass Bob eine Frage beantworten muss, wobei ihm die Moderatorin vier mögliche Antworten vorgibt. Durch 15-maliges Augenzwinken will Alice Bob die richtige Antwort mitteilen. Was ist die Rate dieses Codes?

8.3

Betrachten Sie zwei Kanäle K_1 und K_2 mit Kapazitäten C_1 bzw. C_2 . Diese beiden Kanäle können parallel als ein Kanal K verwendet werden, der als Input (X_1, X_2) nimmt und als Output (Y_1, Y_2) liefert (*Parallelschaltung* von K_1 und K_2). Sei C die Kapazität von K .

- Beweisen Sie $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) = I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2) - I(Y_1; Y_2)$
- Beweisen Sie $C = C_1 + C_2$.