Informationstheorie, FS 2017 | Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik | Nico Gorbach

Übungsblatt 9

Abgabe: Bis Montag, 8. Mai 2017

9.1 [8 Punkte]

Gegeben sei der Kanal $(\mathcal{X} = \{0,1\}, \mathcal{Y} = \{0,1,a,1+a\}, P_{Y|X})$, wobei a eine reelle Zahl ist und $P_{Y|X}$ durch die Beziehung $Y = X + Z$ bestimmt ist; dabei ist Z eine von X unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{Z} = \{0, a\}$ und der durch $P_Z(0) = P_Z(a) = \frac{1}{2}$ gegebenen Verteilung. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals in Abhängigkeit von a.

9.2 [4 + 4 + 4 + 4 Punkte]

Eine Quelle emittiert alle 3 Sekunden ein Symbol aus einem Alphabet $\{a_0, a_1\}$, wobei beide Symbole gleich wahrscheinlich und verschiedenen Emissionen unabhängig sind. Diese Symbole werden gemäss $a_0 \mapsto 000$ und $a_1 \mapsto 111$ codiert und über einen binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\varepsilon < \frac{1}{2}$ gesendet, der pro Sekunde ein Symbol übermitteln kann. Falls der Empfänger in einem 3-Sekunden-Intervall eine der Sequenzen $000, 001, 010, 100$ empfängt, decodiert er diese als a_0; falls er eine andere Sequenz empfängt, decodiert er diese als a_1.

a) Berechnen Sie für jede mögliche empfangene 3er-Sequenz die Wahrscheinlichkeit, dass a_0 gesendet wurde.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass die obige Decodierregel die Wahrscheinlichkeit eines Decodierfehlers minimiert.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Decodierfehlers.

d) Nehmen Sie nun an, dass die Quelle nur noch alle $2n+1$ Sekunden ein Symbol emittiert und a_0, a_1 durch Sequenzen $00\ldots0$ bzw. $11\ldots1$ der Länge $2n+1$ codiert werden. Durch welche Decodierregel wird die Wahrscheinlichkeit eines Decodierfehlers minimiert? Berechnen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

9.3 [4 + 4 + 4 Punkte]

Beim Decodieren eines empfangenen Signals geht es stets darum, den unbekannten Wert einer Zufallsvariablen X anhand des beobachteten Werts einer Zufallsvariablen Y zu schätzen, d.h. eine Funktion $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zu finden, so dass $\hat{X} = g(Y)$ eine möglichst gute Abschätzung von X ist. In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit diesbezüglich optimalen Funktionen g, die die Wahrscheinlichkeit $P_e = P(\hat{X} \neq X)$ eines Decodierfehlers minimieren.

a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $g_{MAP} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ mit[1]

$$g_{MAP}(y) \in \arg\max_{x \in \mathcal{X}} P_{X|Y}(x, y)$$

[1] Für eine Funktion $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ bezeichnet $\arg\max_{x\in\mathcal{X}} f(x)$ die Niveaumenge des Maximums von f, d.h. $\arg\max_{x\in\mathcal{X}} f(x) = \{x^* \in \mathcal{X} \mid f(x^*) = \max_{x\in\mathcal{X}} f(x)\}$.

unter allen Funktionen $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit P_e hat. Eine solche Funktion g_{MAP} heisst *Maximum A Posteriori*-Decodierer.

b) Zeigen Sie, dass für jede Zufallsvariable Z mit Werten in $\mathcal{Z}$ die Ungleichung

$$H(Z) \geq -\log P_Z(z^*)$$

gilt, wobei $z^* \in \mathcal{Z}$ ein Wert mit maximaler Wahrscheinlichkeit ist, d.h. $z^* \in \arg\max_{z\in\mathcal{Z}} P_Z(z)$. Folgern Sie, dass in der oben beschriebenen Situation für $\hat{X} = g_{MAP}(Y)$ und für jedes $y \in \mathcal{Y}$ die Ungleichung

$$H(X|Y = y) \geq -\log P(\hat{X} = X|Y = y)$$

gilt.

c) Zeigen Sie für $\hat{X} = g_{MAP}(Y)$ die Abschätzung

$$P(\hat{X} \neq X) \leq 1 - 2^{-H(X|Y)}.$$

Verwenden Sie dabei das Ergebnis aus (b) sowie die Ungleichung $\sum_z P_Z(z)2^{-z} \geq 2^{-\sum_z P_Z(z)z}$ (eine Anwendung der Jensen-Ungleichung), die für jede reellwertige Zufallsvariable Z gilt.