Informationstheorie, FS 2017 Dr. Luis Haug
ETH Zürich, Dept. Informatik Nico Gorbach

Übungsblatt 10

10.1

Gegeben sei ein Kanal $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, P_{Y|X})$ mit Kapazität C. Seine N-te Erweiterung ist der Kanal $(\mathcal{X}^N, \mathcal{Y}^N, P_{Y^N|X^N})$ mit $P_{Y^N|X^N}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N P_{Y|X}(y_i, x_i)$. Zeigen Sie, dass für jede Verteilung P_{X^N} über $\mathcal{X}^N$ die Ungleichung

$$I(X^N; Y^N) \leq NC$$

gilt. Folgern Sie, dass die Kapazität der N-ten Erweiterung gemessen in bits pro Übertragung des ursprünglichen Kanals gleich C ist.[1]

10.2

Gegeben sei ein Kanal $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, P_{Y|X})$ mit Kapazität C. Konstruieren Sie davon ausgehend für gegebenes $\varepsilon > 0$ einen neuen Kanal, der annähernd rauschfrei ist und dessen Kapazität in bits pro Übertragung des ursprünglichen Kanals $\geq C - \varepsilon$ ist (vlg. vorige Aufgabe).

10.3

Zeigen Sie, dass eine Kaskade von n Kopien eines binären symmetrischen Kanals mit Vertauschungswahrscheinlichkeit ε,

$$X_0 \to \boxed{BSC(\varepsilon)} \to X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \to \boxed{BSC(\varepsilon)} \to X_n,$$

äquivalent ist zu einem einzigen binären symmetrischen Kanal mit Vertauschungswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}(1 - (1 - 2\varepsilon)^n)$. Das zeigt insbesondere, dass die Kapazität eines so konstruierten Kanals gegen 0 geht (falls $\varepsilon \neq 0, 1$).

[1] Das ist zu Vergleichszwecken das sinnvollere Mass ist als die Kapazität selbst.