

Übungsblatt 11

11.1

Sei \mathcal{C} ein linearer $(2^K, N)$ -Code über \mathbb{F}_2 mit systematischer Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} I_K \\ A \end{pmatrix},$$

wobei A eine $((N - K) \times K)$ -Matrix ist. Zeigen Sie, dass die $((N - K) \times N)$ -Matrix

$$H = (-A, I_{N-K})$$

eine Parity-Check-Matrix für \mathcal{C} ist.

11.2

Sei \mathcal{C} ein linearer $(2^K, N)$ -Code über \mathbb{F}_2 mit Codewörtern $\{c(1), \dots, c(2^K)\} \in \mathbb{F}_2^N$.

- a) Zeigen Sie, dass entweder alle Codewörter eine gerade Anzahl an Einsen enthalten, oder die Hälfte der Codewörter eine gerade Anzahl und die anderen Hälfte eine ungerade Anzahl an Einsen enthalten.
- b) Sei $c_j(m)$ das j -te bit von $c(m)$. Zeigen Sie, dass für jedes gegebene j entweder die Hälfte aller $c_j(m)$ oder alle $c_j(m)$ gleich Null sind. Erklären Sie, wie im letzten Fall der Code verbessert werden kann.
- c) Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Zahl der Einsen pro Codewort $\leq N/2$ ist.
- d) Zeigen Sie die Ungleichung

$$d_{\min}(\mathcal{C}) \leq \frac{N2^K}{2(2^K - 1)}$$

für die Minimaldistanz von \mathcal{C} .