Informationstheorie, FS 2021 | Prof. Joachim M. Buhmann
ETH Zürich, Dept. Informatik | Fabian Laumer

Lösungen zu Übungsblatt 8

8.1

Gegeben sei der Kanal $(\mathcal{X} = \{0, 1\}, \mathcal{Y} = \{0, 1, a, 1 + a\}, P_{Y|X})$, wobei a eine reelle Zahl ist und $P_{Y|X}$ durch die Beziehung $Y = X + Z$ bestimmt ist; dabei ist Z eine von X unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{Z} = \{0, a\}$ und der durch $P_Z(0) = P_Z(a) = \frac{1}{2}$ gegebenen Verteilung. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals in Abhängigkeit von a.

Wir unterscheiden folgende Fälle entsprechend dem Wert von a:

- $a = 0$: In diesem Fall ist $X = Y$ und $C = \max I(X; Y) = \max H(X) = 1$.
- $a \in \{\pm 1\}$: Im Fall $a = 1$ kann Y die drei verschiedenen Werte $0, 1, 2$ annehmen und die bedingten Verteilungen sind gegeben durch $P(Y = 0|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) = \frac{1}{2}$ und $P(Y = 1|X = 1) = P(Y = 2|X = 1) = frac12$. Der Kanal ist damit ein binärer Auslöschungskanal mit Auslöschungswahrscheinlichkeit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dessen Kapazität $C = 1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$ ist (siehe Vorlesung). Im Fall $a = -1$ erhält man analog $C = \frac{1}{2}$.
- $a \notin \{0, \pm 1\}$: In diesem Fall kann Y die vier verschiedenen Werte $0, 1, a, 1 + a$ annehmen. Da X bei gegebenem Y eindeutig bestimmt ist, gilt $H(X|Y) = 0$ und damit $C = \max I(X; Y) = \max H(X) = 1$.

8.2

Beim Decodieren eines über einen Kanal $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, P_{Y|X})$ gesendeten Signals geht es stets darum, den unbekannten Wert einer Zufallsvariablen X anhand des beobachteten Werts einer Zufallsvariablen Y zu schätzen, d.h. eine Funktion $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zu finden, so dass $\hat{X} = g(Y)$ eine möglichst gute Abschätzung von X ist. Zeigen Sie, dass jede Funktion $g_{MAP} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ mit

$$g_{MAP}(y) \in \arg\max_{x \in \mathcal{X}} P_{X|Y}(x, y)$$

unter allen Funktionen $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit $P_e = P(\hat{X} \neq X)$ hat. (Eine solche Funktion g_{MAP} heisst *Maximum A Posteriori*-Decodierer.)

Wir können die Fehlerwahrscheinlichkeit für einen Codierer $\hat{X} = g(Y)$ schreiben als

$$P_e(g) = \sum_y P(y) \sum_{x \neq g(y)} P(x|y) = \sum_y P(y)(1 - P(g(y)|y)),$$

und damit gilt

$$P_e(g) = \sum_y P(y)(1 - P(g(y)|y)) \geq \sum_y P(y)(1 - P(g_{MAP}(y)|y)) = P_e(g_{MAP}),$$

denn nach Definition von g_{MAP} ist $P(g_{MAP}(y)|y) \geq P(x|y)$ für alle x, y.

8.3

Seien X, Y, Z Zufallsvariablen, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie jeweils eine nötige und hinreichende Bedingung für Gleichheit an.[1]

a) $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$,

b) $I(X;Z|Y) \geq I(Z;Y|X) - I(Z;Y) + I(X;Z)$.

a) Gemäss Kettenregel gelten $H(X,Y,Z) - H(X,Y) = H(Z|X,Y)$ und $H(X,Z) - H(X) = H(Z|X)$. Die zu zeigende Ungleichung ist deswegen äquivalent zu $H(Z|X,Y) \leq H(Z|X)$ bzw. wegen $H(Z|X) - H(Z|X,Y) = I(Z;Y|X)$ zu

$$I(Z;Y|X) \geq 0.$$

Dass diese Ungleichung stets erfüllt ist wurde in Aufgabe 3.4 gezeigt. Gleichheit gilt genau dann, wenn $Y \to X \to Z$ eine Markov-Kette bilden (siehe Aufgabe 3.5).

b) Die zu zeigende Ungleichung ist äquivalent zu

$$I(X;Z|Y) + I(Z;Y) \geq I(Z;Y|X) + I(X;Z). \tag{1}$$

Durch Verwendung der Kettenregel und unter Ausnutzung der Symmetrie der (bedingten) wechselseitigen Information sieht man, dass beide Seiten in (**??**) gleich $I(Z;X,Y)$ sind. Die zu zeigende Ungleichung ist also ohne weitere Bedingung stets eine Gleichung.

[1] Siehe Aufgabe 3.4 für die Definition der bedingten wechselseitigen Information.