Prof. Joachim M. Buhmann
Fabian Laumer

Lösungen zu Übungsblatt 10

10.1

Zeigen Sie, dass die Kapazität des Kanals mit Übergangsmatrix

$$P_{Y|X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

durch eine Verteilung erreicht wird, die einem der Eingabesymbole Wahrscheinlichkeit 0 gibt. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals. Geben Sie einen intuitiven Grund dafür, dass eines der Symbole nicht verwendet wird.

Für jede Verteilung P_X gilt

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - \sum_{i=1}^{3} P_X(x_i) H(Y|X = x_i) \\ &= H(Y) - ((1 - P(x_2))H(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) + P(x_2) \log 3) \\ &= H(Y) - H(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) - P(x_2)(\log 3 - H(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})) \\ &\leq \log 3 - H(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}). \end{aligned}$$

Wenn $P_X(x_2) = 0$ ist, verschwindet der letzte Term in der vorletzten Zeile; wenn zudem $P_X(x_1) = P_X(x_3) = \frac{1}{2}$ gilt, dann ist Y gleichverteilt und $H(Y) = \log 3$. Diese Verteilung maximiert also $I(X;Y)$, und damit ist die Kapazität des Kanals

$$C = \log 3 - H(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}.$$

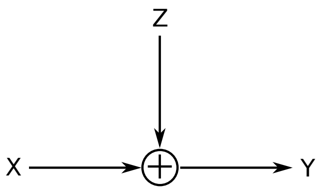
Intuitiv leuchtet das ein, denn gegeben $X = x_2$ ist Y gleichverteilt, d.h. durch das Senden von x_2 wird keine Information übertragen.

10.2

Gegeben sei der Kanal $(\mathcal{X} = \{0, 1\}, \mathcal{Y} = (z_0, z_1, z_0 + 1, z_1 + 1\}, P_{Y|X})$, wobei $z_0 \neq z_1$ ganze Zahlen sind, Z eine auf $\mathcal{Z} = \{z_0, z_1\}$ definierte und von X unabhängige Zufallsvariable mit $P_Z(z_0) = \frac{1}{2} = P_Z(z_1)$ ist, und $P_{Y|X}$ durch die Beziehung $Y = X + Z$ bestimmt ist.

Im Folgenden geht es um die Abhängigkeit der Kapazität des Kanals von der Wahl von $\mathcal{Z}$. Begründen Sie Ihre Antworten jeweils vollständig und führen Sie alle nötigen Rechnungen durch.

a) Berechnen Sie die *maximale* Kapazität, die ein Kanal dieser Form haben kann. Geben Sie ganze Zahlen $z_0 \neq z_1$ und eine Verteilung auf $\mathcal{X}$ an, durch die diese erreicht wird.



Im Fall $|z_0 - z_1| \geq 2$ ist X durch Y eindeutig bestimmt, d.h. $H(X|Y) = 0$, und damit ist $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X)$. Die Gleichverteilung auf $\mathcal{X}$ erreicht hier $I(X;Y) = 1$. Da immer $I(X;Y) \leq \log |\mathcal{X}| = 1$ gilt (für beliebige Wahlen von Z und der Verteilung auf X), ist das die maximale erreichbare Kapazität.

b) Berechnen Sie die *minimale* Kapazität, die ein Kanal dieser Form haben kann. Geben Sie ganze Zahlen $z_0 \neq z_1$ und eine Verteilung auf $\mathcal{X}$ an, durch die diese erreicht wird. Für $|z_0 - z_1| = 1$ ist der Kanal äquivalent zu einem binären Auslöschungskanal mit Auslöschungsws. $\frac{1}{2}$; dessen Kapazität ist $\frac{1}{2}$. Da dieser und der in (a) betrachtete Fall alle möglichen Werte von z_0, z_1 abdecken, ist dies die minimal erreichbare Kapazität.

Die Kapazität kann man auch so berechnen: Da Y gegeben $X = 0$ bzw. $X = 1$ gleichverteilt ist, ist $H(Y|X) = 1$. Für eine gegebene Verteilung von X erhalten wir mit $p := P(X = 0)$ die Verteilung $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1-p))$ von Y, deren Entropie gegeben ist durch

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= -\frac{1}{2}p \log(\frac{1}{2}p) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-p) \log \frac{1}{2}(1-p) \\
&= 1 + \frac{1}{2} H_2(p),
\end{aligned}
$$

wobei $H_2(p) = H(p, 1-p)$ ist. Damit folgt $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = \frac{1}{2} H_2(p)$. Dies wird maximiert durch die Gleichverteilung auf $\mathcal{X}$, d.h. $p = \frac{1}{2}$; in dem Fall gilt $H_2(p) = 1$, und damit ist die Kapazität gleich $\frac{1}{2}$.