

Übungsblatt 1

1.1

Es seien A , B und C drei Ereignisse aus einer Menge Ω von Elementarereignissen. Drücken Sie mit Hilfe von Mengenoperationen (d.h. Vereinigung, Schnitt, Komplementbildung) die folgenden Ereignisse aus:

- a) A_1 : Keines der drei Ereignisse A , B und C tritt ein.
- b) A_2 : Mindestens eines tritt ein.
- c) A_3 : Genau eines tritt ein.
- d) A_4 : Mindestens zwei treten ein.
- e) A_5 : Mindestens eines tritt nicht ein.
- f) A_6 : Höchstens zwei treten ein.

1.2

Wir modellieren einen unfairen Würfel durch folgende Verteilung auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

X	1	2	3	4	5	6
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X , X^2 und $P_X(X)$.

1.3

Nehmen Sie Stellung zum Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage: Beim dreimaligen Würfeln mit einem fairen Würfel sind die Ereignisse 'die Augensumme ist 11' und 'die Augensumme ist 12' gleich wahrscheinlich, denn beide Ereignisse können auf genau sechs verschiedene Arten dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 11 &= 6 + 4 + 1 = 6 + 3 + 2 = 5 + 5 + 1 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 = 4 + 4 + 3, \\ 12 &= 6 + 5 + 1 = 6 + 4 + 2 = 6 + 3 + 3 = 5 + 5 + 2 = 5 + 4 + 3 = 4 + 4 + 4. \end{aligned}$$

1.4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem gut gemischten Stapel von 32 Skatkarten die 4 Assen direkt aufeinander liegen. Geben Sie explizit den genutzten Wahrscheinlichkeitsraum an.

1.5

Wir betrachten ein Testverfahren für eine Krankheit, an der eine Person mit Wahrscheinlichkeit $p_K = 0.00001$ erkrankt, d.h. es tritt durchschnittlich ein Erkrankter auf 100.000 Einwohner auf. Das Verfahren hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $p_F = 0.01$, d.h. das Testergebnis ist mit Wahrscheinlichkeit 0.99 korrekt (sowohl im positiven wie im negativen Fall).

- a) Alice lässt sich testen und der Test fällt positiv aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet Alice trotz des Testergebnisses nicht an der Krankheit?
- b) Bobs Test fällt negativ aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet Bob dennoch an der Krankheit?

Vergleichen Sie mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten vor dem Test.

1.6

Die folgende Tabelle zeigt die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $K = \text{“Wetter in Kanada”}$ und $S = \text{“Wetter in der Schweiz”}$. Beide Zufallsvariablen nehmen Werte in der Menge $\{h, w, k, e\}$ an (“heiss”, “warm”, “kühl”, “eiskalt”).

Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung an:

P_{KS}		S			
		h	w	k	e
K	h	0.17	0.12	0.03	0
	w	0.04	0.09	0.06	0.01
	k	0.01	0.06	0.10	0.03
	e	0	0.03	0.11	0.14

- a) Ist P_{KS} eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
- b) Berechnen Sie die Verteilungen P_S und P_K .
- c) Sind die Ereignisse $\{K = k\}$ und $\{S = w\}$ unabhängig?
- d) Sind die Zufallsvariablen K und S unabhängig?
- e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in Kanada warm ist, gegeben dass es in der Schweiz heiss ist?
- f) Angenommen Sie mögen warmes Wetter und wissen, dass es nicht eiskalt sein wird in Kanada. Wo sollten Sie ihre Ferien verbringen (Kanada oder Schweiz)?

1.7

Angenommen, wir wenden den $(r = 3)$ -Wiederholcode für die Datenübertragung über den binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit $0 < p < \frac{1}{2}$. Dessen Decoder $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$, $\mathbf{r} \mapsto \hat{s}(\mathbf{r})$, bildet \mathbf{r} auf das häufigste in \mathbf{r} vorkommende Symbol ab (siehe Vorlesung bzw. [MacKay, Kapitel 1]). Zeigen Sie, dass $\hat{s}(\mathbf{r}) = \operatorname{argmax}_s P(\mathbf{r}|s)$ gilt.