Informationstheorie, FS 2021
ETH Zürich, Dept. Informatik

Prof. Joachim M. Buhmann
Fabian Laumer

Übungsblatt 2

2.1

Sei X eine Zufallsvariable mit der folgenden Verteilung:

$$P_X(1) = \frac{1}{2}, \quad P_X(2) = \frac{1}{12} + \varepsilon, \quad P_X(3) = \frac{5}{12} - \varepsilon.$$

Skizzieren Sie $H(X)$ als Funktion von ε. Bestimmen Sie insbesondere das Maximum von $H(X)$.

2.2

Im Folgenden schreiben wir $H(p_1, p_2, \dots)$ für die Entropie einer (nicht unbedingt endlichen) Verteilung, deren Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots$ haben. Zeigen Sie folgende "Zerlegungseigenschaft" der Entropie:

$$H(p_1, p_2, \dots) = H(p_1, 1 - p_1) + (1 - p_1) H\left(\tfrac{p_2}{1-p_1}, \tfrac{p_3}{1-p_1}, \dots\right)$$

Interpretieren Sie diese Eigenschaft.

2.3

Eine faire Münze wird geworfen, bis zum ersten Mal "Kopf" erscheint. X sei die Zufallsvariable, die angibt, beim wievielten Wurf das der Fall ist. Berechnen Sie $H(X)$ auf zwei Arten. 1): Direkte Berechnung der Entropie über die Defintion der Entropie einer Zufallsvariable. 2): Durch Anwednung der SZerlegeigenschaft"der Entropie.

a) Mit Hilfe der Identität $\sum_{n=1}^{\infty} n f^n = \frac{f}{(1-f)^2}$.

b) Mit Hilfe der Zerlegungseingeschaft aus der vorigen Aufgabe.

2.4

Seien X und Y Zufallsvariablen mit $Y = f(X)$ für eine Funktion f. Können Sie allein mit dieser Information den Wert von $H(Y|X)$ bestimmen? Können Sie eine nötige und hinreichende Bedingung an X und Y dafür angeben, dass $H(Y|X)$ diesen Wert annimmt?

2.5

Wir betrachten zwei unabhängige Würfel. Seien die Zufallsvariablen X und Y die jeweils gewürfelten Augenzahlen. Weiter seien die Zufallsvariablen S und T definiert als $S = X + Y$ und $T = X + 2Y$. Bestimmen Sie folgende Ausdrücke mit möglichst geringem Rechenaufwand: $H(S)$, $H(T)$, $H(X|S)$, $I(X;S)$, $I(Y;S)$, $I(X;T)$ und $H(S|X)$.

2.6

Zeigen, dass die Kullback-Leibler-Divergenz $D_{KL}(P\|Q)$ zwischen zwei Verteilungen als eine Verallgemeinerung der wechselseitigen Information $I(X;Y)$ zwischen zwei Zufallsvariablen aufgefasst werden kann.

2.7

Beweisen Sie die Positivität der Kullback-Leibler-Divergenz (*Gibbs-Ungleichung*): Für alle Verteilungen $P, Q : \Omega \to [0, 1]$ gilt $D_{KL}(P\|Q) \geq 0$, mit Gleichheit genau dann, wenn $P = Q$ ist. Folgern Sie daraus und aus dem Ergebnis der letzten Aufgabe, dass $I(X;Y) \geq 0$ ist mit Gleichheit genau dann, wenn X, Y unabhängig sind.