Informationstheorie, FS 2021
ETH Zürich, Dept. Informatik

Prof. Joachim M. Buhmann
Fabian Laumer

Übungsblatt 4

4.1

Gegeben seien die Mengen $\{0, 10, 11\}$, $\{00, 01, 10, 110\}$ und $\{01, 10\}$. Geben Sie jeweils eine Zufallsvariable X samt Verteilung an, so dass die Menge die Menge der Codewörter eines Huffman-Codes für X ist, oder begründen Sie, dass es keine solche gibt.

4.2

Entscheiden Sie für die Tupel $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 3, 3)$ und $(1, 3, 3, 3, 4, 5)$ jeweils, ob sie die Wortlängen eines Huffman-Codes sind. Können Sie ein allgemeines Kriterium dafür angegeben, dass ein gegebenes Tupel $(l_1, \ldots, l_n)$ die Wortlängen eines Huffman-Codes darstellt?

4.3

Geben Sie ein Beispiel für eine Verteilung $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_5)$ an, für die es mindestens zwei optimale Codes gibt, für die sich die (nach Länge geordneten) Tupel der Codewortlängen unterscheiden.

4.4

Beweisen Sie folgende Behauptung aus der Vorlesung (siehe Beweis der Optimalität von Huffman-Codes): Sei X eine Zufallsvariable X mit der Verteilung $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, wobei $p_i = P_X(x_i)$ für $x_i \in X(\Omega)$. Dann gibt es einen optimalen präfixfreien Code C^* für X mit folgender Eigenschaft: Es gibt $x_{i_0} \neq x_{i_1}$ mit kleinster Wahrscheinlichkeit (d.h. $p_{i_0} + p_{i_1} \leq p_j + p_k$ für alle $j \neq k$), so dass sich $C^*(x_{i_0})$ und $C^*(x_{i_1})$ nur im letzten Bit unterscheiden.

4.5

Finden Sie für die Zufallsvariable X mit der Verteilung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
P_X	0.49	0.26	0.12	0.04	0.04	0.03	0.02

einen (binären) Huffman-Code und berechnen Sie seine erwartete Länge.