Prof. Joachim M. Buhmann
Fabian Laumer

Übungsblatt 8

8.1

Gegeben sei der Kanal ($\mathcal{X} = \{0, 1\}, \mathcal{Y} = \{0, 1, a, 1 + a\}, P_{Y|X}$), wobei a eine reelle Zahl ist und $P_{Y|X}$ durch die Beziehung $Y = X + Z$ bestimmt ist; dabei ist Z eine von X unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{Z} = \{0, a\}$ und der durch $P_Z(0) = P_Z(a) = \frac{1}{2}$ gegebenen Verteilung. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals in Abhängigkeit von a.

8.2

Beim Decodieren eines über einen Kanal ($\mathcal{X}, \mathcal{Y}, P_{Y|X}$) gesendeten Signals geht es stets darum, den unbekannten Wert einer Zufallsvariablen X anhand des beobachteten Werts einer Zufallsvariablen Y zu schätzen, d.h. eine Funktion $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zu finden, so dass $\hat{X} = g(Y)$ eine möglichst gute Abschätzung von X ist. Zeigen Sie, dass jede Funktion $g_{MAP} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ mit

$$g_{MAP}(y) \in \arg\max_{x \in \mathcal{X}} P_{X|Y}(x, y)$$

unter allen Funktionen $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit $P_e = P(\hat{X} \neq X)$ hat. (Eine solche Funktion g_{MAP} heisst *Maximum A Posteriori*-Decodierer.)

8.3

Seien X, Y, Z Zufallsvariablen, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie jeweils eine nötige und hinreichende Bedingung für Gleichheit an.[1]

a) $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \leq H(X, Z) - H(X)$,

b) $I(X; Z|Y) \geq I(Z; Y|X) - I(Z; Y) + I(X; Z)$.

[1] Siehe Aufgabe 3.4 für die Definition der bedingten wechselseitigen Information.