Informationstheorie, FS 2021 Prof. Joachim M. Buhmann
ETH Zürich, Dept. Informatik Fabian Laumer

Übungsblatt 9

9.1 (Fortsetzung von Aufgabe 8.2)

a) Zeigen Sie, dass für jede Zufallsvariable Z mit Werten in $\mathcal{Z}$ die Ungleichung

$$H(Z) \geq -\log P_Z(z^*)$$

gilt, wobei $z^* \in \mathcal{Z}$ ein Wert mit maximaler Wahrscheinlichkeit ist, d.h. $z^* \in \arg\max_{z\in\mathcal{Z}} P_Z(z)$. Folgern Sie, dass in der in Aufgabe 8.2 beschriebenen Situation für $\hat{X} = g_{MAP}(Y)$ und für jedes $y \in \mathcal{Y}$ die Ungleichung

$$H(X|Y = y) \geq -\log P(\hat{X} = X|Y = y)$$

gilt.

b) Zeigen Sie für $\hat{X} = g_{MAP}(Y)$ die Abschätzung

$$P(\hat{X} \neq X) \leq 1 - 2^{-H(X|Y)}.$$

Verwenden Sie dabei das Ergebnis aus (a) sowie die Ungleichung $\sum_z P_Z(z)2^{-z} \geq 2^{-\sum_z P_Z(z)z}$ (eine Anwendung der Jensen-Ungleichung), die für jede reellwertige Zufallsvariable Z gilt.

9.2

Gegeben sei ein Kanal $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, P_{Y|X})$ mit Kapazität C. Seine N-te Erweiterung ist der Kanal $(\mathcal{X}^N, \mathcal{Y}^N, P_{Y^N|X^N})$ mit $P_{Y^N|X^N}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N P_{Y|X}(y_i, x_i)$. Zeigen Sie, dass für jede Verteilung P_{X^N} über $\mathcal{X}^N$ die Ungleichung

$$I(X^N; Y^N) \leq NC$$

gilt. Folgern Sie, dass die Kapazität der N-ten Erweiterung gemessen in Bits pro Übertragung des ursprünglichen Kanals gleich C ist.[1]

9.3

Gegeben sei ein Kanal $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, P_{Y|X})$ mit Kapazität C. Konstruieren Sie davon ausgehend für gegebenes $\varepsilon > 0$ einen neuen Kanal $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}', P_{Y'|X'})$, der annähernd rauschfrei ist (d.h. $H(Y'|X' = x') \approx 0$ für alle $x' \in \mathcal{X}'$) und dessen Kapazität in Bits pro Übertragung des ursprünglichen Kanals $\geq C - \varepsilon$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Existenz eines Codes mit Rate $\approx C$ und maximaler Blockfehlerwahrscheinlichkeit ≈ 0 für den ursprünglichen Kanal.

---

[1] Das ist zu Vergleichszwecken das sinnvollere Mass ist als die Kapazität selbst.