Informationstheorie, FS 2021 | Prof. Joachim M. Buhmann
ETH Zürich, Dept. Informatik | Fabian Laumer

Lösungen zu Übungsblatt 5

5.1

Gegeben sei eine Folge von unabhängigen binären Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit der gleichen Verteilung $P(0) = 0.4$, $P(1) = 0.6$. Für die Rechnungen in der folgenden Aufgabe sollten Sie evtl. teils einen Computer verwenden.

a) Bestimmen Sie $H(X_i)$.

$H(X) = -0.6 \log 0.6 - 0.4 \log 0.4 = 0.97095$ bits.

b) Beschreiben Sie für $n = 25$ und $\varepsilon = 0.1$ die typische Menge $T_{n,\varepsilon}$ und berechnen Sie $P(T_{n,\varepsilon})$ und $|T_{n,\varepsilon}|$.

Die typische Menge $T_{n,\varepsilon} = \{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n : H(X) - \varepsilon < -\frac{1}{n} P(\mathbf{x}) < H(X) + \varepsilon\}$ enthält für $n = 25$ und $\varepsilon = 0.1$ genau diejenigen $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{25}$ mit $-\frac{1}{n} \log P(\mathbf{x}) \in (0.87095, 1.07095)$; aus Tabelle **??** kann man ablesen, dass das genau die Folgen mit $11 \leq k \leq 19$ sind, wobei k die Anzahl der Einsen in der Folge bezeichnet (in der Tabelle ist $p = P(1) = 0.6$). $P(T_{n,\varepsilon})$ ist damit gegeben durch $F(19) - F(10) = 0.97068 - 0.034392 = 0.936246$, wobei F die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $\mathbf{x} \mapsto k$ bezeichnet (die eine Folge auf die Anzahl der in ihre enthaltenen Einsen abbildet). Aus der zweiten Spalte lässt sich die Kardinalität ermitteln:

$$|T_{n,\varepsilon}| = \sum_{k=11}^{19} \binom{25}{k} = 26366510.$$

c) Bestimmen Sie für $\delta = 0.1$ und $n = 25$ die Kardinalität der kleinsten Menge $S_{n,\delta} \subset \{0,1\}^n$ mit $P(S_{n,\delta}) \geq 1 - \delta$ (d.h. bestimmten Sie $2^{H_\delta(X^n)}$).

$S_{n,\delta}$ ist nach Definition eine Menge kleinstmöglicher Kardinalität, die $P(S_{n,\delta}) > \delta$ erfüllt. Um eine solche Menge zu finden, definieren wir mit eine Folge von Teilmengen $\Omega_i \subset \{0,1\}^{25}$ durch $\Omega_0 := \emptyset$ und $\Omega_i := \Omega_{i-1} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_i\}$, wobei $\hat{\mathbf{x}}_i$ ein Element mit grösster Wahrscheinlichkeit aus dem Komplement von Ω_{i-1} ist; dann können wir $S_{n,\delta} = \Omega_{i_\delta}$ setzen, wobei i_δ der kleinste Index ist so dass $P(\Omega_i) \geq 1 - \delta$ gilt. Da in unserem Beispiel die Wahrscheinlichkeit von Elementarereignissen monoton mit k wächst, beginnen wir mit den Elementen mit maximalem k. Aus der Tabelle kann man ablesen, dass $P(k \geq 12) > 0.9 > P(k \geq 13)$ (denn $P(k \geq 12) = 1 - F(11)$ etc.), und daher enthält das so konstruierte $S_{n,\delta}$ zunächst alle Folgen mit $k \geq 13$; es gilt $P(k \geq 13) = 1 - F(12) = 0.846232$ und $|\{\mathbf{x} \,|\, k \geq 13\}| = 16777216$. Die Anzahl der Folgen in $S_{n,\delta}$ mit $k = 12$ ist

$$\left\lceil \frac{0.9 - P(k \geq 12)}{p^{13}(1-p)^{13}} \right\rceil = 3680691.$$

Damit ist $|S_{n,\delta}| = 16777216 + 3680691 = 20457907$.

k	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$F(k)$	$-\frac{1}{n}\log P(\mathbf{x})$
0	1	0.000000	0.000000	1.321928
1	25	0.000000	0.000000	1.298530
2	300	0.000000	0.000000	1.275131
3	2300	0.000001	0.000001	1.251733
4	12650	0.000007	0.000008	1.228334
5	53130	0.000045	0.000054	1.204936
6	177100	0.000227	0.000281	1.181537
7	480700	0.000925	0.001205	1.158139
8	1081575	0.003121	0.004326	1.134740
9	2042975	0.008843	0.013169	1.111342
10	3268760	0.021222	0.034392	1.087943
11	4457400	0.043410	0.077801	1.064545
12	5200300	0.075967	0.153768	1.041146
13	5200300	0.113950	0.267718	1.017748
14	4457400	0.146507	0.414225	0.994349
15	3268760	0.161158	0.575383	0.970951
16	2042975	0.151086	0.726469	0.947552
17	1081575	0.119980	0.846448	0.924154
18	480700	0.079986	0.926435	0.900755
19	177100	0.044203	0.970638	0.877357
20	53130	0.019891	0.990529	0.853958
21	12650	0.007104	0.997633	0.830560
22	2300	0.001937	0.999571	0.807161
23	300	0.000379	0.999950	0.783763
24	25	0.000047	0.999997	0.760364
25	1	0.000003	1.000000	0.736966

Tabelle 1: Bestimmung der typischen Menge $T_{N,\varepsilon}$ für $N = 25$, $\varepsilon = 0.1$

d) Bestimmen Sie $P(T_{n,\varepsilon} \cap S_{n,\delta})$ und $|T_{n,\varepsilon} \cap S_{n,\delta}|$ für die Mengen aus (b) und (c).

Der Schnitt $T_{n,\varepsilon} \cap S_{n,\delta}$ enthält alle Folgen mit $13 \leq k \leq 19$ und 3680691 Folgen mit $k = 12$. Damit gelten $P(T_{n,\varepsilon} \cap S_{n,\delta}) = 0.870638$ und $|T_{n,\varepsilon} \cap S_{n,\delta}| = 16708810 + 3680691 = 20389501$.

5.2

Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \{0,1\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung P, und sei $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$. Für $\delta \in [0,1]$ sei $H_\delta(X^n) = \min\{\log |S_\delta| \big| S_\delta \subset \{0,1\}^n, P(S_\delta) \geq 1 - \delta\}$. Skizzieren Sie $\frac{1}{n} H_\delta(X^n)$ als Funktion von δ für $n = 1, 2, 1000$ wenn P gegeben ist durch (a) $(0.1, 0.9)$ bzw. (b) $(0.5, 0.5)$.

Siehe Lösung zu Aufgabe 4.15 in [MacKay, S. 87].